16. Tipos de EDO's de primeira ordem

16.1 EDO com separação de variáveis

Definição 16.1.1 Uma EDO de primeira ordem $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ é dita *separável* se $f(x,y) = g(x) \cdot f(y)$ ou

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y) \tag{16.1}$$

Se $f(y) \neq 0$, equação (16.1) implica que

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx,$$

ou seja $F(y) = G(x) + C$. Se pudermos inverter F, a solução vai ter a forma explicita

$$y = \varphi(x) = F^{-1}(G(x) + C).$$

Obs Note que dividindo por $f(y)$ nos podemos perder as soluções tais que $f(y) = 0$. Logo o caso $f(y) = 0$ deve ser analisado separadamente (veja exemplo em baixo).

■ **Exemplo 16.1** Ache a solução geral da equação

$$\frac{dy}{dx} = x^3(1+y).$$

Solução. Temos $g(x) = x^3$ e $f(y) = 1 + y$.

1) Suponha que $f(y) = 1 + y = 0$, ou $y = -1$. É fácil ver que a função constante $y = -1$ é solução.

2) Suponha que $f(y) \neq 0$ ou $y \neq 1$, logo

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int x^3 dx,$$

ou

$$\ln|1+y| = \frac{x^4}{4} + C,$$

e $|1+y| = e^{\frac{x^4}{4}} \cdot e^C = C_1 \cdot e^{\frac{x^4}{4}}$, com $C_1 > 0$. Temos

$$1+y = \pm C_1 \cdot e^{\frac{x^4}{4}} = C_2 \cdot e^{\frac{x^4}{4}}, \quad C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Finalmente, resumindo os casos 1) e 2), obtemos formula para todas as soluções possíveis da equação inicial (isto é, obtemos solução geral): $y = -1 + C_3 \cdot e^{\frac{x^4}{4}}$, $C_3 \in \mathbb{R}$. ;-)

Obs A forma mais geral de EDO separável é

$$f_2(y)g_2(x)dy = f_1(y)g_1(x)dx.$$

Se $f_1(y) \neq 0$ e $g_2(x) \neq 0$, obtemos

$$\int \frac{f_2(y)}{f_1(y)} dy = \int \frac{g_1(x)}{g_2(x)} dx.$$

■ **Exemplo 16.2** Ache a solução geral da equação

$$x \cdot (1-2y)dy = y \cdot (x-2)dx.$$

Solução. Temos $g_2(x) = x$, $f_2(y) = 1-2y$, $f_1(y) = y$, $g_1(x) = x-2$. Observe que as funções constantes $g_2(x) = x = 0$, $f_1(y) = y = 0$ são soluções.

Se $x \neq 0$, e $y \neq 0$, obtemos $\dfrac{1-2y}{y} dy = \dfrac{x-2}{x} dx$, ou seja

$$\int (\frac{1}{y} - 2)dy = \int (1 - \frac{2}{x})dx,$$

portanto

$$\ln|y| - 2y = -2\ln|x| + x + C$$

é solução na forma implícita. Observe que neste caso não podemos expressar y em termos de x na forma explicita. Finalmente, solução geral é união das soluções $y = 0$, $x = 0$ e $\ln|y| - 2y = -2\ln|x| + x + C$. ;-)

■ **Exemplo 16.3** Ache solução de PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos x}{1+2y^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Solução. Note que $y = 0$ não é solução, logo podemos dividir a equação por y sem perda das soluções. Temos

$$\frac{1+2y^2}{y}dy = \cos x dx$$

e

$$\int (\frac{1}{y} + 2y)dy = \int \cos x dx.$$

Então $\ln|y| + y^2 = \operatorname{sen} x + C$. Usando $y(0) = 1$, obtemos $\ln|1| + 1 = \operatorname{sen}(0) + C$, assim $C = 1$. Resumindo, obtemos que

$$\ln|y| + y^2 = \operatorname{sen} x + 1$$

é solução do PVI na forma implícita. ;-)

16.2 EDO's homogêneas

Definição 16.2.1 1) Uma função $f(x,y)$ é *homogênea*, se

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Seja $\lambda = \dfrac{1}{x}$, logo

$$f(x,y) = f\big(1, \frac{y}{x}\big) = F\big(\frac{y}{x}\big).$$

2) Uma EDO $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ é dita homogênea se $f(x,y)$ for homogênea, i.e.

$$\frac{dy}{dx} = F\big(\frac{y}{x}\big). \tag{16.2}$$

Método de resolução de equação homogênea (16.2): Seja $z = \dfrac{y}{x}$, então $y = z\cdot x$ e $\dfrac{dy}{dx} = x\cdot\dfrac{dz}{dx} + z$, portanto pelo (16.2), $x\dfrac{dz}{dx} + z = F(z)$. Finalmente obtemos EDO separável

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F(z)-z}{x}.$$

■ **Exemplo 16.4** Ache a solução geral da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Solução. Temos $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$. Observe que

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x - \lambda y} = \frac{x+y}{x-y} = f(x,y),$$

então f é homogênea. Além disso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

Se $y = zx$, assim $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dz}{dx} + z$, e portanto $x\dfrac{dz}{dx} + z = \dfrac{1+z}{1-z}$. Logo

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1+z-z+z^2}{1-z} = \frac{1+z^2}{1-z},$$

e

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+z^2}{1-z},$$

então

$$\int \frac{1-z}{1+z^2} dz = \int \frac{dx}{x}.$$

Simplificando, temos

$$\int \frac{1-z}{1+z^2} dz = \int \left(\frac{1}{1+z^2} - \frac{2z}{2(1+z)^2}\right) dz = \arctan z - \frac{1}{2}\ln(1+z^2).$$

Então, $\arctan z - \dfrac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln|x| + C$, e a solução geral de EDO na forma implícita tem forma

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left[(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] = \ln|x| + C.$$

;-)

16.3 EDO's exatas

Consideremos a equação

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{16.3}$$

Suponha que existe $\psi(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = P(x,y), \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = Q(x,y). \end{cases} \tag{16.4}$$

Logo supondo que y é uma função de x, obtemos

$$P(x,y)+Q(x,y)\frac{dy}{dx}=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{d[\psi(x,y(x))]}{dx}=0,$$

É fácil ver que a curva de nível $\psi(x,y)=C$ resolve a equação $\dfrac{d[\psi(x,y(x))]}{dx}=0$. Ou seja, a curva de nível $\psi(x,y)=C$ é solução geral na forma implícita da equação (16.3).

Definição 16.3.1 Se existir $\psi(x,y)$ tal que a condição (16.4) seja valida, (16.3) é dita *exata*.

O seguinte Teorema diz quando vale (16.4).

Teorema 16.3.1 — Condição de Euler. Suponha que $P,Q,\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ são continuas em $A=(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$, assim

$$Pdx+Qdy=0$$

é uma equação exata em A se, e somente se,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{16.5}$$

em A. Isto é, existe $\psi(x,y)$ tal que (16.4) vale.

Mostremos que (16.5) implica que (16.3) é exata. Suponha que $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ em A, logo o campo $\vec{F}=(P,Q)$ é conservativo (como $\mathrm{rot}\vec{F}=(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})\vec{k}=\vec{0}$). Então existe função potencial $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=Q.$$

Seja $\psi(x,y)=C$, assim

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=0,$$

e portando $Pdx+Qdy=0$ é exata.

■ **Exemplo 16.5** Ache a solução geral da equação

$$(x-y)dx+(y^2-y)dy=0.$$

Solução. Observe que

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1,$$

portanto a condição de Euler vale em todo $\mathbb{R}^2$. Logo EDO é exata, e existe $\psi(x,y)$ tal que

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=P(x,y)=x-y\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y}=Q(x,y)=y^2-x.\end{cases}$$

Portanto
$$\psi(x,y) = \int P(x,y)dx + h(y) = \int (x-y)dx + h(y) = \frac{x^2}{2} - xy + h(y),$$
onde $h(y)$ é uma função que depende apenas de y. Agora
$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = -x + h'(y) = Q = y^2 - x \quad \Rightarrow \quad h'(y) = y^2 \quad \Rightarrow \quad h(y) = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + C_1.$$
Assim, $\psi(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^3}{3} + C_1$ e solução geral tem forma
$$\frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^3}{3} = C.$$
Observe que a solução é uma curva de nível $\psi(x,y) = C$ e não é uma função de 2 variáveis $\psi(x,y)$. ;-)

■ **Exemplo 16.6** Ache a solução do PVI
$$\begin{cases} (2x\operatorname{sen} y + e^x\cos y)dx + (x^2\cos y - e^x \operatorname{sen} y)dy = 0, \\ y(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$
Solução. Condição de Euler $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos y - e^x \operatorname{sen} y = \frac{\partial P}{\partial x}$ está verdadeira em $\mathbb{R}^2$, assim existe $\psi(x,y)$ tal que
$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial x} = P, \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = Q. \end{cases}$$
Logo
$$\psi(x,y) = \int Qdx + h(y) = \int (2x\operatorname{sen} y + e^x\cos y)dx + h(y) = x^2\operatorname{sen} y + e^x\cos y + h(y).$$
Agora
$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = x^2\cos y - e^x\operatorname{sen} y + h'(y) = Q(x,y) = x^2\cos(y) - e^2\operatorname{sen} y.$$
Por outro lado $h'(y) = 0$, assim $h(y) = C_1$. Portanto
$$\psi(x,y) = x^2\operatorname{sen} y + e^x\cos y = C$$
é solução geral. Como $y(0) = \frac{\pi}{4}$, obtemos
$$0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + e^0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = C$$
e $C = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Resumindo
$$x^2\operatorname{sen} y + e^x\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
é solução de PVI. ;-)